ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1979

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : Les cinq questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Sujet n° 1 –

I - Soit $\mathcal{D} = [-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2]$.

1/ Montrer qu'il existe une fonction φ, définie dans $\mathcal{D}$, à valeurs dans $]0,1[$

$$\mathcal{D} \xrightarrow[\varphi]{}]0,1[$$

$$x \longrightarrow \varphi(x) = \theta$$

$\theta = \varphi(x)$ étant défini, pour tout $x \in \mathcal{D}$ par l'équation :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin(\theta x) .$$

2/ Expliciter cette fonction $\theta = \varphi(x)$

3/ Limite de $\varphi(x)$ pour $x \longrightarrow 0$

II - Soit $\mathcal{D}_1 =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

Montrer qu'il existe une fonction ψ, définie dans $\mathcal{D}_1$ à valeurs dans $]0,1[$

$$\mathcal{D}_1 \xrightarrow[\psi]{}]0,1[$$

$$x \longrightarrow \psi(x) = \theta_1$$

$\theta_1 = \psi(x)$, étant définie, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$ par l'équation

$$\text{Log}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \frac{1}{(1 + \theta_1 x)^3}$$

2/ Expliciter $\theta_1 = \psi(x)$.

3/ Limite de $\theta_1 = \psi(x)$ pour $x \longrightarrow 0$.

.../...

Sujet n° 2 –

Introduction -

1/ Dans ce problème, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est la partie entière de x c'est-à-dire :

$$E(x) = n \iff n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \leqslant x < n + 1 .$$

2/ On convient : pour $n \in \mathbb{Z}$

$(-1)^n = 1$ si n pair

$(-1)^n = -1$ si n impair

(0 étant pair)

Soit f une fonction

a) définie sur $\mathbb{R}$

b) intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$

c) de période T.

I - Montrer $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)\,dx$$

En déduire $$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\beta^{\beta+T} f(x)\,dx$$

II - On considère la fonction réelle F, associée à f par

$$x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrer qu'à partir de l'étude de F pour $x \in [0,T]$, on déduit facilement l'étude de F sur $\mathbb{R}$.

III - Etudier la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = (-1)^{E(x)} [x - E(x)]$$

courbe représentative de son graphe dans un repère orthonormé.

IV - Mêmes questions pour la fonction G définie sur $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

Sujet n° 3 –

Soit la famille d'intégrales

$$I_\alpha = \int_0^1 x^\alpha \sqrt{1 - x^2}\,dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

1/ Pour quelles valeurs de α, I_α a-t-elle un sens ?

2/ Trouver une relation entre I_α et $I_{\alpha-2}$ quand ces deux intégrales ont un sens

[on trouve $(\alpha + 2) I_\alpha = (\alpha - 1) I_{\alpha-2}$]

3/ Calculer I_0, I_1

puis I_{2p}, I_{2p+1} $\qquad (p \in \mathbb{N})$

.../...

Sujet n° 4 –

Soit l'équation différentielle où l'inconnue est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$

$4xy'' + 2y' - y = 0$

1/ Chercher les fonctions solutions développables en série entière

$y = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$

en cherchant une relation de récurrence entre les coefficients.

On constatera que ces fonctions sont définies par la donnée de a_0 .

Quel est l'intervalle de convergence ?

A priori, y-a-t-il sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, d'autres solutions que les restrictions des fonctions qu'on vient de trouver ?

2/ Chercher les fonctions solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ en faisant le changement de variable $x = t^2$.

Chercher de même les fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en faisant le changement $x = -t^2$.
(on exprimera ces solutions, suivant le cas, à l'aide de fonctions hyperboliques ou de fonctions trigonométriques)

3/ En déduire qu'il existe des fonctions solution définies, continues, deux fois dérivables (au moins) sur $\mathbb{R}$.

4/ Comparer l'ensemble des solutions trouvées en (1) et l'ensemble des solutions trouvées en (2).

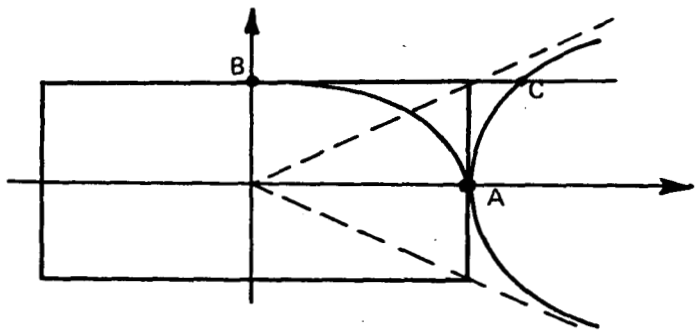
Sujet n° 5 –

Rapportées au même repère orthonormé, on donne les trois courbes :

l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

la droite $y = b$



a et b étant deux longueurs quelconques.

La droite est la tangente à l'ellipse en B et rencontre en C (d'abscisse positive) l'hyperbole.

Soit Γ le contour formé par :

l'arc (AC) d'hyperbole ; le segment rectiligne CB ; l'arc (BA), quart de l'ellipse.

Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\Gamma} (x\,dy - y\,dx)$.

Γ décrit dans le sens (ACBA).

Quelle est l'interprétation géométrique de I ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail